Fiocco e antifiocco di neve di Koch

Se costruiamo la curva di Koch su ciascun lato di un triangolo equilatero, si possono ottenere due particolari frattali: il fiocco di neve di Koch o *Koch's snowflake* e l'antifiocco di neve di Koch o *Koch's flowsnake*.

Fiocco di neve di Koch: si ottiene costruendo su ciascun lato di un triangolo equilatero la curva di Koch rivolta verso l'esterno del triangolo.

Perimetro infinito

Sia $l = 1$ il lato del triangolo equilatero di partenza e $n = 0, 1, 2, \dots$ il numero di iterazioni.

Sia P_n il perimetro all'n-esima iterazione, allora $P_0 = 3$, $P_1 = 3 \cdot \frac{4}{3}$, $P_2 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2$, … , $P_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$, e si ha che

$$\lim_{n \to +\infty} P_n = +\infty.$$

Area finita

Sia $l = 1$ il lato del triangolo equilatero di partenza. L'area si calcola sommando, ad ogni iterazione, all'area del triangolo iniziale la nuova area aggiuntiva, che non è altro che la somma delle aree dei triangoli equilateri che si aggiungono su ogni lato.

Siano $S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ l'area del triangolo equilatero di partenza e S_n l'area aggiuntiva all'n-esima iterazione con $n = 1, 2, 3, \dots$ Allora le aree aggiuntive sono $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{12}$, $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)$, … , $S_n = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$ e costituiscono i termini di una progressione geometrica di primo termine $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{12}$ e ragione $q = \left(\frac{4}{9}\right)$. Quindi l'area S del fiocco di neve è data da

$$S = S_0 + \lim_{n \longrightarrow +\infty} (S_1 + S_2 + \dots + S_n) = S_0 + \frac{S_1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{12}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{8}{5} \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

L'area totale del fiocco di neve di Koch è gli $\frac{8}{5}$ dell'area del triangolo equilatero di partenza.

Antifiocco di neve di Koch: si ottiene costruendo su ciascun lato di un triangolo equilatero la curva di Koch rivolta verso l'interno del triangolo.

Perimetro infinito

Il calcolo è lo stesso di quello fatto per il fiocco di neve.

Area finita

In questo caso si tratta di sottrarre le aree che si aggiungono ad ogni nuova iterazione da quella del triangolo equilatero iniziale.

Avendo già calcolato le aree aggiuntive ad ogni iterazione nel caso del fiocco di neve di Koch, il calcolo che dobbiamo fare è

$$S_0 - \lim_{n \longrightarrow +\infty} (S_1 + S_2 + \dots + S_n) = S_0 - \frac{S_1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{12}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{2}{5} \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

L'area totale dell'antifiocco di neve di Koch è i $\frac{2}{5}$ dell'area del triangolo equilatero di partenza.